# PUISSANCE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

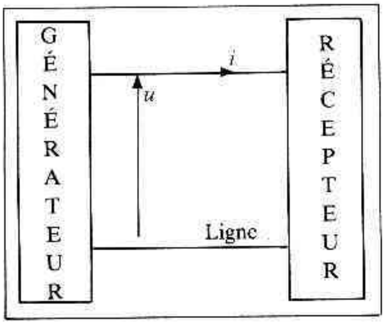



*Fig. 16.01.*

**Un dipôle, formé d'éléments dont certains sont des bobines ou des condensateurs, peut être tantôt récepteur, tantôt générateur. Les éléments réactifs emmagasinent de l'énergie pendant la durée correspondant à un fonctionnement en récepteur et restituent cette énergie ultérieurement, ils fonctionnent alors en générateur.**

Un ampèremètre et un voltmètre permettent la mesure indirecte de la puissance apparente.

Dans le cas d'installations domestiques, E.D.F. facture de l'énergie active. La relation entre énergie active $W$ et puissance active $P$ est $W = Pt$. Lorsque $P$ est exprimée en kilowatts et $t$ en heures, $W$ s'exprime alors en kilowattheures (kWh) : le kilowattheure est l'unité pratique d'énergie active.

## 1. GÉNÉRALITÉS

### 1.1. Puissance instantanée

La puissance instantanée transmise par un générateur (partie amont d'une ligne) à un récepteur (partie aval de la ligne) est le produit $u.i$ des valeurs instantanées de la tension $u$ entre les fils de ligne et de l'intensité du courant qui la parcourt (fig. 16.01).

$$\boxed{p = u.i}$$

En régime sinusoïdal, $u$ et $i$ sont des fonctions sinusoïdales du temps qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$u = U\sqrt{2} \cos \omega t \quad \text{et} \quad i = I\sqrt{2} \cos (\omega t - \varphi),$$

d'où : $$p = 2UI \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi),$$

soit : $$p = UI[\cos(\omega t - \omega t + \varphi) + \cos(\omega t + \omega t - \varphi)],$$

ou encore : $$p = UI \cos \varphi + UI \cos (2\omega t - \varphi).$$

La puissance instantanée est donc la somme d'une fonction constante dans le temps et d'une fonction périodique du temps.

### 1.2. Puissance apparente

En régime sinusoïdal, $U$ et $I$ représentent les valeurs efficaces de la tension et de l'intensité instantanées. Le produit $UI$ ne représente pas la puissance reçue ou transférée ; ce produit s'appelle **puissance apparente**. On la représente par la lettre $S$ :

$$\boxed{S = UI} \qquad \left\{ \begin{array}{l} U \text{ en volts,} \\ I \text{ en ampères,} \\ S \text{ en volts-ampères.} \end{array} \right.$$

## 2. PUISSANCE ACTIVE

### 2.1. Définition

**La puissance active est la valeur moyenne de la puissance instantanée sur une période.**

Dans l'expression de la puissance instantanée :

$$p = UI \cos \varphi + UI \cos (2\omega t - \varphi) ;$$

– un terme est une fonction sinusoïdale $UI \cos (2\omega t - \varphi)$ dont la valeur moyenne est nulle ; il représente une *puissance oscillatoire ou fluctuante*,

– un terme est indépendant du temps ($UI \cos \varphi$) : il représente donc la valeur moyenne $\overline{p}$ de la valeur instantanée $p$ c'est-à-dire la **puissance active** transférée par l'intermédiaire de la ligne. Cette puissance est aussi symbolisée par la lettre $P$ :

$$\boxed{\overline{p} = P = UI \cos \varphi} \begin{cases} U \text{ en volts,} \\ I \text{ en ampères,} \\ P \text{ en watts.} \end{cases}$$

**Remarques :**

– Par le calcul, $\overline{p}$ est obtenue en effectuant le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{I}$ de Fresnel associés aux grandeurs $u$ et $i$.

$$\overline{p} = P = \vec{U}.\vec{I}$$

– Le produit ***I* cos $\varphi$** est appelé **intensité active :** c'est l'intensité qui correspond à la consommation de puissance active.

## 2.2. Mesure de la puissance active

### ■ 2.2.1. Appareil de mesure utilisé

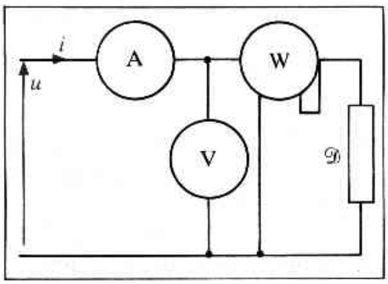



*Fig. 16.02. Mesure de la puissance active consommée par un dipôle 𝒟.*

Travaux pratiques :
Le même montage est utilisé pour différents dipôles : 𝒟 est successivement :
– un résistor de résistance $R = 220\ \Omega$, 1,5 A (ou 500 W),
– une bobine d'inductance $L = 1$ H,
– un condensateur de capacité $C = 10\ \mu$F.

La puissance active se mesure à l'aide d'un wattmètre (fig. 16.02). Que l'on ait affaire à du courant continu ou à du courant alternatif, les graduations et les calibres sont les mêmes. Cependant, le circuit tension d'un wattmètre présente une réactance dont la valeur peut varier de façon importante avec la fréquence. Si l'utilisateur dépasse la gamme de fréquences indiquées par le constructeur pour laquelle l'erreur commise est négligeable, il est nécessaire d'apporter des corrections. Si la fréquence est de l'ordre du hertz, l'utilisation du wattmètre n'est plus possible car l'aiguille de l'appareil oscille.

### 2.2.2. Application : puissance active consommée par un dipôle

**a) Dipôles élémentaires**

■ ***Résistor***

Le dipôle 𝒟 étudié (fig. 16.02) est un résistor de résistance $R = 220\ \Omega$.

*Analyse expérimentale :*

Les relevés des indications de l'ampèremètre, du voltmètre et du wattmètre montrent que la puissance $\overline{p}$ mesurée au wattmètre est égale au produit $UI$. La résistance étant connue, il est aisé de constater que :

$$\boxed{\overline{p} = UI = RI^2}$$

*Explication :*

La tension aux bornes d'une résistance et le courant qui la traverse étant en phase ($\varphi = 0$, donc $\cos \varphi = 1$), nous pouvons écrire : $\overline{p} = UI$. La loi d'Ohm appliquée à la résistance ($U = RI$) et la relation $\overline{p} = UI$, fournissent bien le résultat trouvé : $\overline{p} = RI^2$.

■ ***Bobine***

Le dipôle 𝒟 (fig. 16.02) est une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 1$ H (2 A).

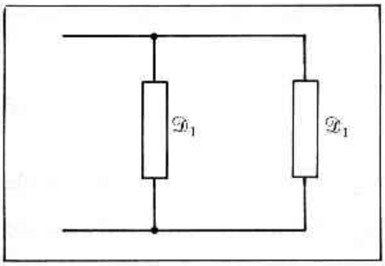



***Fig. 16.03.*** *Groupement de dipôles en parallèle.*

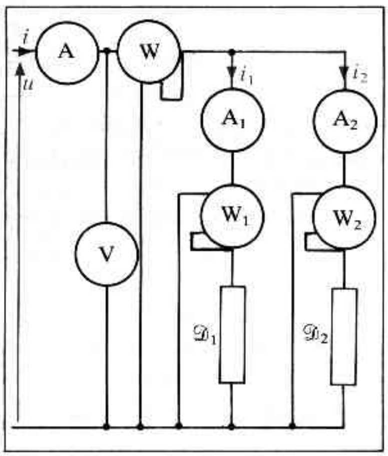



***Fig. 16.04.*** *Puissance active consommée par un groupement de dipôles. La tension d'alimentation est égale à 220 V.*
Indication des appareils de mesures :
I=*13,6 A,* U=*220 V,* P=*2 650 W,*
$I_1$=*10 A,* $P_1$=*2 200 W,*
$I_2$=*6,7 A,* $P_2$=*450 W.*

Remarque : *en effectuant le calcul* $RI^2+rI^2$*, nous retrouvons la puissance totale* P *consommée par le groupement des deux dipôles.*

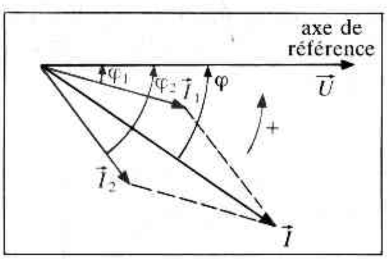



***Fig. 16.05.*** *Diagramme de Fresnel dans le cas général.*

*Analyse expérimentale :*
Bien qu'il y ait un courant non nul qui traverse le dipôle et une tension importante à ses bornes, le wattmètre indique une puissance consommée très faible.

*Explication :*
L'intensité du courant sinusoïdal traversant une **bobine parfaite** est en quadrature retard avec la tension à ses bornes :

$(\vec{I}, \vec{U})=\varphi=\pi/2$ rad, donc : $\cos\varphi=0$. La puissance moyenne ($UI\cos\varphi$) est donc nulle dans ce cas idéal. Le résultat expérimental donne une valeur très faible mais non nulle car la bobine comporte un noyau de fer qui est le siège de pertes (par hystérésis et par courants de Foucault) et le bobinage présente une résistance. La bobine n'est donc pas parfaite : elle consomme en réalité une faible puissance active.

■ ***Condensateur***
Le dipôle $\mathscr{D}$ (fig. 16.02) est un condensateur de capacité $C=10$ μF (400 V).

*Analyse expérimentale :*
Bien qu'il y ait un courant qui traverse le dipôle et une tension à ses bornes, le wattmètre indique une puissance consommée nulle.

*Explication :*
L'intensité du courant sinusoïdal traversant un condensateur est en quadrature avance avec la tension à ses bornes :

$$(\vec{I}, \vec{U}) = \varphi = -\frac{\pi}{2}\text{ rad} \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi = 0$$

La puissance moyenne ($UI\cos\varphi$) est donc nulle, cela est en accord avec le résultat expérimental.

**b) Groupement de dipôles**
*Analyse expérimentale :*
Considérons le groupement de la figure 16.03.
$\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont en parallèle : $\mathscr{D}_1$ est un résistor (22 Ω, 10 A), $\mathscr{D}_2$ est une bobine réelle (0,1 H, $r=10$ Ω, $I_{max}=8$ A).
Ce groupement est intégré dans le montage de la figure 16.04. Le wattmètre **W** du circuit principal indique une puissance consommée $\overline{p}$ représentant la somme des puissances $\overline{p_1}$ et $\overline{p_2}$ consommées par les dipôles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ :

$$\overline{p}=\overline{p_1}+\overline{p_2}.$$

*Explication :*
Ce résultat découle du principe de la conservation de l'énergie.
$\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ étant en parallèle nous pouvons écrire :

$$i=i_1+i_2$$

Les vecteurs de Fresnel associés à ces grandeurs sinusoïdales (fig. 16.05 et 16.06) sont donc liés par la relation :

$$\vec{I}=\vec{I}_1+\vec{I}_2$$

soit en multipliant les deux membres par $\vec{U}$ :

$$\vec{U}.\vec{I} = \vec{U}.\vec{I}_1 + \vec{U}.\vec{I}_2$$

or : $\overline{p} = \vec{U}.\vec{I}$, $\quad\overline{p_1} = \vec{U}.\vec{I}_1$ *et* $\overline{p_2} = \vec{U}.\vec{I}_2$

d'où : $\overline{p} = \overline{p_1} + \overline{p_2}$.

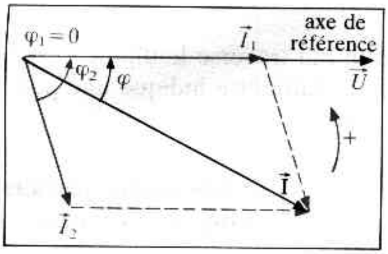



***Fig. 16.06.*** *Diagramme de Fresnel pour les courants et tension du montage de la figure 16.04. Pour le circuit proposé, nous avons :*
*$\varphi_1=0$ et : $\varphi_2 \approx 72°$.*

Ce résultat peut être généralisé à tout groupement de dipôles en parallèle.
Une démonstration semblable, appliquée à un groupement série, conduit à un résultat identique. D'où la généralisation suivante :

**La puissance active dissipée dans un groupement de dipôles est égale à la somme des puissances actives dissipées dans chacun des dipôles :**

$$\overline{p} = \Sigma \overline{p_i}$$

# 3. PUISSANCE RÉACTIVE

## 3.1. Définition

La représentation de Fresnel « courant-, tension » pour un dipôle montre que la composante $\vec{I}_a$, projection du vecteur $\vec{I}$ sur l'axe de référence $\vec{U}$, a pour module ($I \cos \varphi$). Nous l'avons déjà appelée : **intensité active.**

La projection $\vec{I}_r$ du vecteur $\vec{I}$ sur la perpendiculaire à l'axe de référence a pour module ($I \sin \varphi$). $\vec{I}_r$ est appelée **intensité réactive.**

**On appelle puissance réactive $Q$ dissipée dans un dipôle, le produit de la valeur efficace $U$ de la tension aux bornes du dipôle par l'intensité réactive $I_r = I \sin \varphi$.**

$$\boxed{Q = UI \sin \varphi} \qquad \begin{cases} U \text{ en volts,} \\ I \text{ en ampères,} \\ Q \text{ en vars.} \end{cases}$$

## 3.2. Puissance réactive d'un dipôle

■ ***Résistor***
L'intensité $i$ du courant sinusoïdal traversant un résistor est en phase avec la tension $u$ à ses bornes. Le déphasage $\varphi$ entre $i$ et $u$ est donc nul, sin $\varphi$ également, d'où :

$$\boxed{Q = 0}$$

**Un résistor ne consomme aucune puissance réactive.**

■ ***Bobine***
L'intensité $i$ du courant sinusoïdal traversant une bobine est pratiquement en quadrature retard avec la tension $u$ à ses bornes. Le déphasage $\varphi$ de $u$ par rapport à $i$ est de $+\pi/2$ rad, donc $\sin \varphi = 1$,

et : $Q = UI$

Comme : $U = L\omega I$

nous obtenons : $\boxed{Q = L\omega I^2}$ ou encore : $\boxed{Q = \dfrac{U^2}{L\omega}}$

**$Q>0$ : une bobine consomme (ou absorbe) de la puissance réactive.**

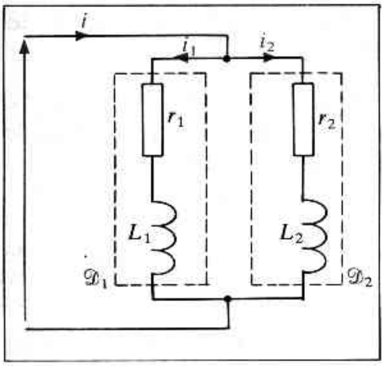



***Fig. 16.07.*** *Groupement de dipôles.*

**Dans un circuit $R$, $L$, $C$ série, la puissance réactive $Q=UI \sin \varphi$ s'exprime sous la forme $XI^2$, avec :**

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

**Donc :** $Q=U_L I-U_C I$

**– A la résonance :**

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

**A chaque instant $Q=0$ ; l'inductance consomme autant d'énergie réactive que le condensateur en fournit.**

**– Lorsque :**

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0$$

**le générateur fournit de la puissance réactive au circuit (circuit inductif).**

**– Lorsque :**

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0$$

**le générateur reçoit de la puissance réactive du circuit (circuit capacitif).**

■ ***Condensateur***

L'intensité $i$ du courant sinusoïdal traversant un condensateur est en quadrature avance avec la tension $u$ à ses bornes. Le déphasage $\varphi$ de $u$ par rapport à $i$ est de $-\pi/2$ rad, donc $\sin \varphi=-1$ et :

$$Q=-UI$$

Comme : $$U = \frac{I}{C\omega}$$

nous obtenons : $\boxed{Q = \frac{-I^2}{C\omega}}$ ou encore : $\boxed{Q = -C\omega U^2}$

**$Q<0$ : un condensateur fournit de la puissance réactive.**

## 3.3. Groupement de dipôles

Considérons le groupement de la figure 16.07.

$\mathcal{D}_1$ est une bobine d'inductance $L_1$ et de résistance $r_1$

$\mathcal{D}_2$ est une bobine réelle d'inductance $L_2$ et de résistance $r_2$

Le diagramme de Fresnel du groupement ainsi formé (fig. 16.08) montre, par une projection des vecteurs de Fresnel $\vec{I}$, $\vec{I_1}$ et $\vec{I_2}$ associés aux grandeurs sinusoïdales $i$, $i_1$ et $i_2$ sur l'axe perpendiculaire à l'axe de référence, que nous avons :

$$I \sin \varphi = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2$$

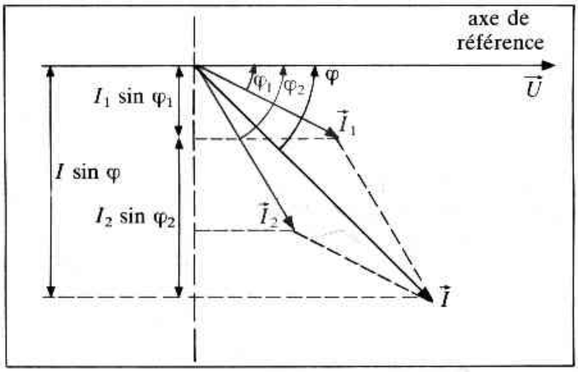



***Fig. 16.08.*** *Diagramme de Fresnel.*

En multipliant les deux membres par $U$ nous obtenons :

$$UI \sin \varphi = UI_1 \sin \varphi_1 + UI_2 \sin \varphi_2$$

D'où : $$Q = Q_1 + Q_2.$$

Ce résultat peut être généralisé à tout groupement. Il est connu sous le nom de **théorème de Boucherot.**

**Enoncé du théorème : Dans un circuit alimenté sous une tension sinusoïdale de fréquence constante, la puissance réactive dissipée dans un groupement de dipôles est égale à la somme des puissances réactives dissipées dans chacun des dipôles :**

$$\boxed{Q = \Sigma Q_i}$$

## 3.4. Phénomènes physiques en relation avec la puissance réactive

Dans un circuit comportant des éléments inductifs ou capacitifs, l'échange d'énergie entre le générateur et ces éléments se solde par un bilan moyen nul : cet échange à lieu dans les deux sens.

**Exemple de la bobine :**

Lorsque l'intensité $i$ augmente de 0 à $\hat{I}$, la bobine emmagasine de l'énergie $(L\hat{I}^2/2)$ fournie par le générateur. Lorsque l'intensité $i$ diminue de $\hat{I}$ à 0, la bobine restitue cette énergie au générateur qui la fournit à nouveau à la bobine lors de la variation de 0 à $-\hat{I}$, celle-ci la restituant lors de la variation de $-\hat{I}$ à 0. Sur une période, le bilan global est bien nul.

La puissance réactive $Q$, en régime sinusoïdal, traduit l'importance de cet échange.

# ■ 4. FACTEUR DE PUISSANCE

## 4.1. Définition

On appelle facteur de puissance $f_p$ le quotient de la puissance active $\bar{p}$ par la puissance apparente $S$ :

$$f_p = \frac{\bar{p}}{S}$$

En **régime sinusoïdal**, $\bar{p}=UI\cos\varphi$ et $S=UI$

Donc : $$\boxed{f_p = \cos\varphi.}$$

## 4.2. Importance du facteur de puissance

Les lignes de moyennes puissances transportent l'énergie électrique sous 20 kV (souvent de 10 à 15 kV seulement).

Pour des installations industrielles de moyennes puissances E.D.F. impose un facteur de puissance élevé (par exemple supérieur à 0,93).

En effet, pour fournir une puissance $\bar{p}$ déterminée sous une tension de valeur efficace $U$ constante, il faut un courant d'intensité $i$ dont la valeur efficace $I$ est :

$$I = \frac{\bar{p}}{U\cos\varphi}$$

Pour un utilisateur demandant une puissance $P$, plus le facteur de puissance est élevé, plus le courant appelé est faible donc plus les pertes par effet Joule dans l'installation de ce consommateur seront faibles.

Plus le facteur de puissance est faible, plus la valeur de $I$ fournie doit être élevée. Il faut que les alternateurs, transformateurs et les conducteurs des lignes de transport puissent être parcourus par ce courant. E.D.F. pénalise les consommateurs d'énergie réactive (ceux dont le facteur de puissance est inférieur à 0,93), en facturant le supplément d'énergie réactive consommée.

## 4.3. Relèvement du facteur de puissance

Dans le cas d'une installation dont la valeur du facteur de puissance est trop faible, il est nécessaire de relever ce facteur à une valeur conforme à la norme imposée. Pour cela on utilise un condensateur que l'on branche en parallèle avec l'installation

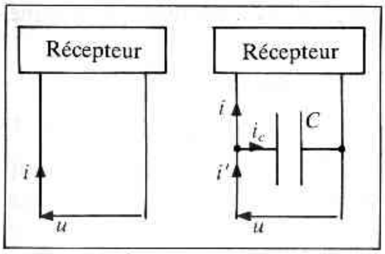



***Fig. 16.09.*** *Relèvement du facteur de puissance.*

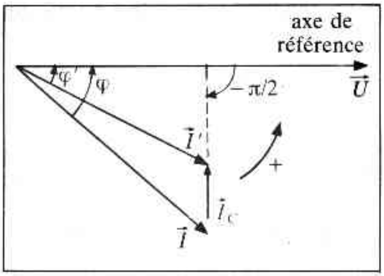



***Fig. 16.10.*** *Diagramme de Fresnel des courants.*

Le calcul de la capacité peut être aussi effectué à partir du diagramme de Fresnel des courants traduisant la relation $\vec{I}'=\vec{I}+\vec{I}_C$

*Projetons les vecteurs* $\vec{I}'$, $\vec{I}$ *et* $\vec{I}_C$ *sur une normale à l'axe de référence (axe des tensions). Nous obtenons :*

$I \sin \varphi = I' \sin \varphi' + UC\omega$ (1) $(UC\omega = I_C)$.

*Projetons les vecteurs* $\vec{I}'$, $\vec{I}$ *et* $\vec{I}_C$ *sur l'axe de référence. Nous obtenons :*

$$I \cos \varphi = I' \cos \varphi'.$$

*Soit :*

$$I' = \frac{I \cos \varphi}{\cos \varphi'}. \qquad (2)$$

*En utilisant les relations (1) et (2), il vient :*

$$C = \frac{I \sin \varphi - I \cos \varphi \tan \varphi'}{U\omega}$$

*En multipliant numérateur et dénominateur par U/cos φ on retrouve le résultat du paragraphe 4.3.*

(fig. 16.09 et 16.10). La puissance active consommée par le condensateur étant nulle s'il est parfait (négligeable sinon), la puissance active de l'ensemble « installation-condensateur » reste inchangée. Globalement la puissance réactive consommée par l'ensemble « installation-condensateur » est inférieure à celle consommée par l'installation seule.

Calcul de la capacité du condensateur à utiliser pour relever le facteur de puissance de cos $\varphi$ à cos$\varphi'$ :

– sans condensateur, nous avons :

$$P=UI\cos\varphi \quad \text{et :} \quad Q=UI\sin\varphi$$

donc : $Q=P\tan\varphi$

– avec condensateur, nous avons :

$$P'=UI'\cos\varphi' \quad \text{et :} \quad Q'=UI'\sin\varphi'$$

donc : $Q'=P'\tan\varphi'$

Un condensateur ne consomme aucune puissance active (donc $P=P'$) et fournit une puissance réactive :

$$Q_c=C\omega U^2$$

La différence $Q-Q'$ provient du condensateur, donc :

$$Q-Q'=Q_c$$

d'où : $C\omega U^2 = P\tan\varphi - P\tan\varphi'$,

soit : $$\boxed{C = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega U^2}}$$

# ■ 5. UTILISATION DU THÉORÈME DE BOUCHEROT

La connaissance des puissances actives $P_i$ et réactives $Q_i$ des différents éléments récepteurs d'une installation électrique, permet de prédéterminer la puissance apparente $S$ de l'installation lorsque les récepteurs fonctionnent simultanément. Si de plus, la tension d'alimentation est connue ($U$), l'intensité efficace $I$ du courant appelé se calcule aisément ainsi que le facteur de puissance cos $\varphi$ de l'ensemble.

Tous ces calculs se font à partir des puissances ; ils évitent les constructions de Fresnel qui, tout en étant pratiques, sont parfois longues du fait du soin qui doit être apporté à leur réalisation.

Evidemment, nous supposons *l'installation alimentée sous une tension de fréquence constante.*

**Pour l'installation considérée, en supposant qu'elle comporte n éléments récepteurs,**

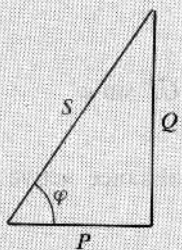
**– la puissance active est égale à :**

$$P = \sum_1^n P_i = UI\cos\varphi \qquad (1)$$

**– la puissance réactive est égale à (théorème de Boucherot) :**

$$Q = \sum_1^n Q_i = UI\sin\varphi \qquad (2)$$

**Remarque :** Les puissances actives peuvent être additionnées, il en est de même pour les puissances réactives ; en revanche les puissances apparentes ne doivent jamais être additionnées. Elles se calculent à partir des puissances actives et réactives. La relation ci-contre peut être déterminée graphiquement en utilisant le triangle des puissances.




Dans un circuit $R$, $L$, $C$ série, la puissance active $P=UI\cos\varphi$ s'exprime sous la forme $RI^2$.

Elevons les relations (1) et (2) au carré et effectuons la somme membre à membre. Nous obtenons :

$$P^2+Q^2=(UI)^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

or $$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1 \quad \text{et} \quad UI=S$$

donc : $$P^2+Q^2=S^2$$

la puissance apparente est égale à :

$$\boxed{S=\sqrt{P^2+Q^2}}$$

Si la tension efficace $U$ est connue, l'intensité se calcule à partir de la relation :

$$\boxed{I=\frac{S}{U}=\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{U}}$$

Comme : $$P=UI\cos\varphi=S\cos\varphi$$

l'expression du facteur de puissance de l'installation est alors :

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{P}{S}}$$